محاسبات تصادفی

بهاره اختری

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

$b.akhtari@iasbs.ac.ir$

شهریور ۱۳۹۵

فهرست

۱ یک مثال کاربردی

یک مثال کاربردی

اختیار خرید اروپایی

یک اختیار خرید اروپایی یعنی اختیار (اجبارنیست) خرید کالای مشخصی را در زمان سررسید مشخص T و با قیمت توافقی K به نگهدارنده می دهد و نویسنده اختیار را، به این علت که خود دارایی با ارزشی است، با قیمت V با نگهدارنده معامله می کند. یکی از مسائل مهم در ریاضیات مالی، تعیین قیمت V به صورت عادلانه است.

فرض کنید دارایی تحت بحث، دارای دینامیک ذیل باشد:

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن $S(t)$ قیمت دارایی در لحظه t و σ تلاطم بازار و μ بازده است. S_0 قیمت دارایی در لحظه شروع است. همچنین $W(t)$ فرآیند وینر در لحظه t است. این یک معادله دیفرانسیل تصادفی است!

سؤال

چه تعبیری از $dW(t)$ دارید؟

قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی

اکنون به بحث تعیین قیمت اختیار باز می گردیم. یکی از روش های تعیین قیمت عادلانه V بر اساس مباحث نظری، به صورت ذیل است:

$$V(S(T),T) = \mathbf{E}_Q\big(f(S(T))\big),$$

که درآن $f(S(T))$ پرداخت نهایی است. در مثال مذکور،

$$f(S(T)) = e^{-rT}(S(T)-K)^+$$

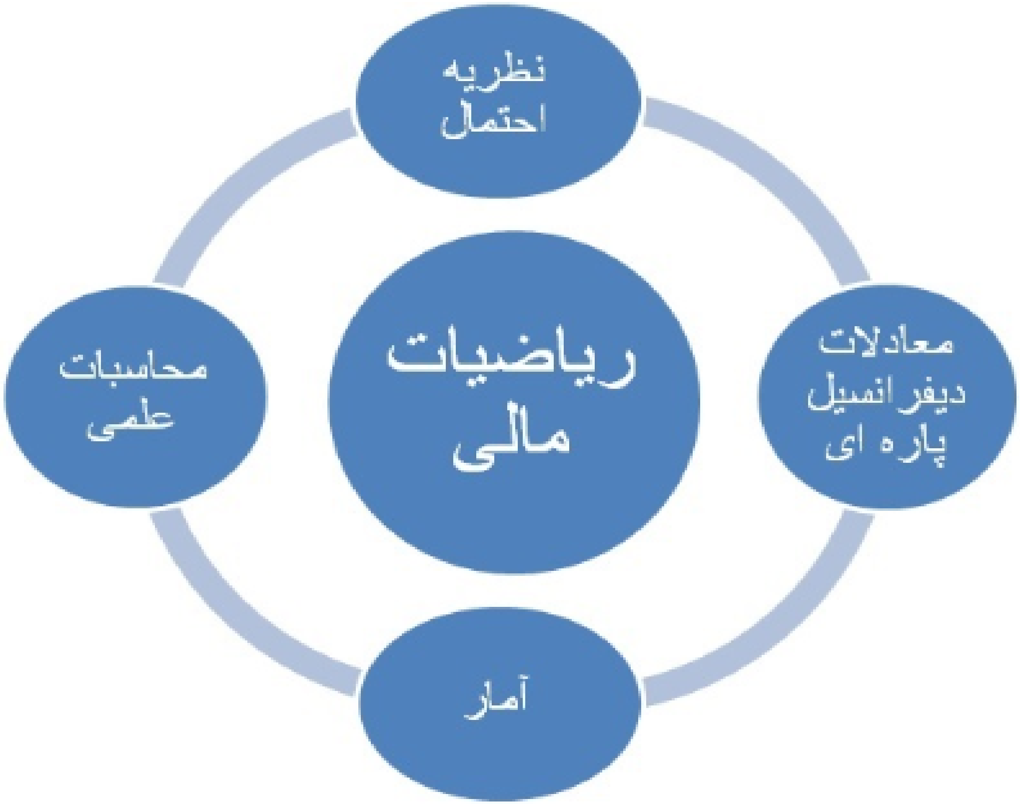
است که درآن r نرخ بهره بدون ریسک است. بر اساس مباحث نظری، Q را اندازه ریسک خنثی گوییم.

سؤال

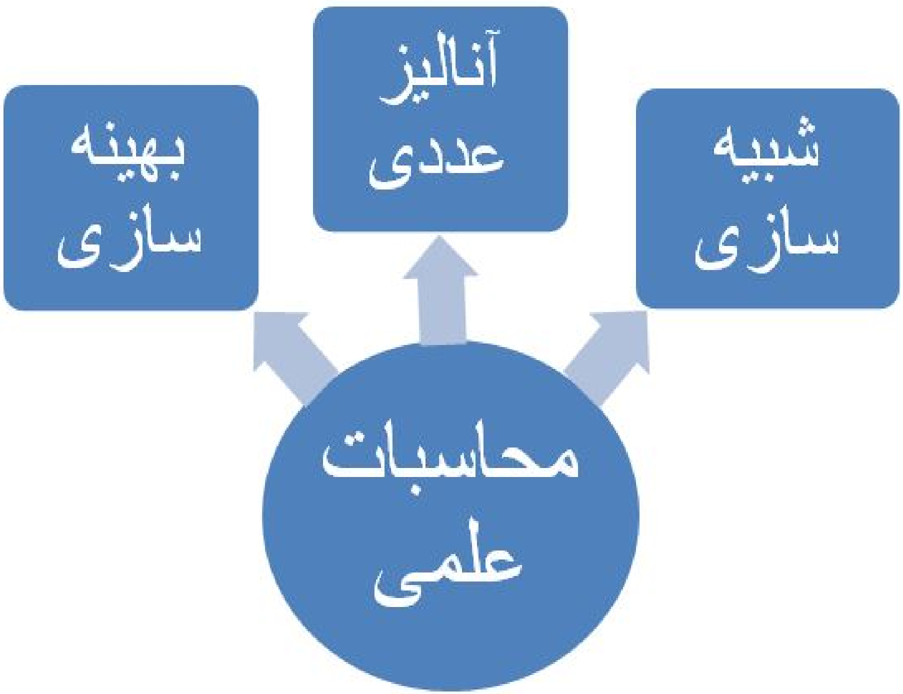
سؤال اول: چگونه S را محاسبه کنیم؟

سؤال دوم: چگونه مقدار مورد انتظار را محاسبه کنیم؟

از این دست قیمت گذرای ها در ریاضیات مالی که مبتنی بر دارایی تحت بحث و همچنین انتگرال تصادفی است، اندک نیستند. از این رو بسیار مورد توجه ریاضیدانان است که روش هایی محاسباتی برای تقریب این مطلوب ها فراهم آید که قابل اعتماد و کارا باشند.



شکل ۱: پایه های ریاضیات مالی



شکل ۲: محاسبات علمی

۲ حسابان تصادفی

حسابان تصادفی

حسابان تصادفی با یک سه تایی به صورت $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ آغاز می شود. Ω فضای نمونه ای، $\mathcal{F}$، σـمیدان و $\mathbf{P}$ اندازه احتمال است. این سه تایی را فضای اندازه احتمال گوییم. به صورت مختصر موارد ذیل را مطرح می کنیم:

- فضای اندازه به دنباله صعودی از σـمیدان های $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}$ که آن را فیلتر می نامیم، مجهز می شود. $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}, \mathbf{P})$ یک فضای احتمال فیلترشده است. $[t_0, \infty]$ مجموعه اندیس گذاراست.

- فرض می کنیم فضای اندازه $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}, \mathbf{P})$ کامل است. فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}$ از راست پیوسته است و $\mathcal{F}_0$ شامل همه ی پیشامدهای با اندازه صفر است.

- متغیر تصادفی X، به صورت $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \longrightarrow (\mathbf{R}^d, \beta^d)$ تعریف می شود با این ویژگی که به ازای هر مجموعه باز $A \in \beta^d$، $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ است. $d \geq 1$ و β^d مجموعه اندازه پذیر تولید شده توسط مجموعه های باز است. در این حالت گوییم X، $\mathcal{F}$ـاندازه پذیراست.

- σـمیدان تولید شده توسط متغیر تصادفی X به صورت ذیل است:

$$\sigma(X) = \sigma\Big(\{X^{-1}(U); \quad U \in \beta^d (\text{یک مجموعه باز است } U)\}$$

- فرآیند تصادفی X_t گردایه ای از متغیرهای تصادفی است که درآن $t \in [t_0, \infty)$ است.
- $X_t \in \mathcal{F}_t$ بدین معنی است که X_t، به عنوان یک متغیر تصادفی $\mathcal{F}_t$ـاندازه پذیر است.

۱.۲ فرآیند وینر

تحت فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq t_0}, \mathbf{P})$، فرآیند تصادفی $W(t)$ را فرآیند وینر گوییم هرگاه:

- $W(t) - W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $t - s$ است :

$$\mathbf{E}(W(t) - W(s)) = 0 \quad \mathbf{Var}(W(t) - W(s)) = t - s.$$

- برای نقاط $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$، نموهای براونی

$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_{N+1}) - W(t_N)$ مستقل هستند.

- اگر با احتمال یک $W(t_0) = 0$ است آنگاه فرآیند وینر را استاندارد گوییم.

درادامه به چند نکته در مورد فرآیند وینر می پردازیم:

نکاتی در بحث فرآیند وینر

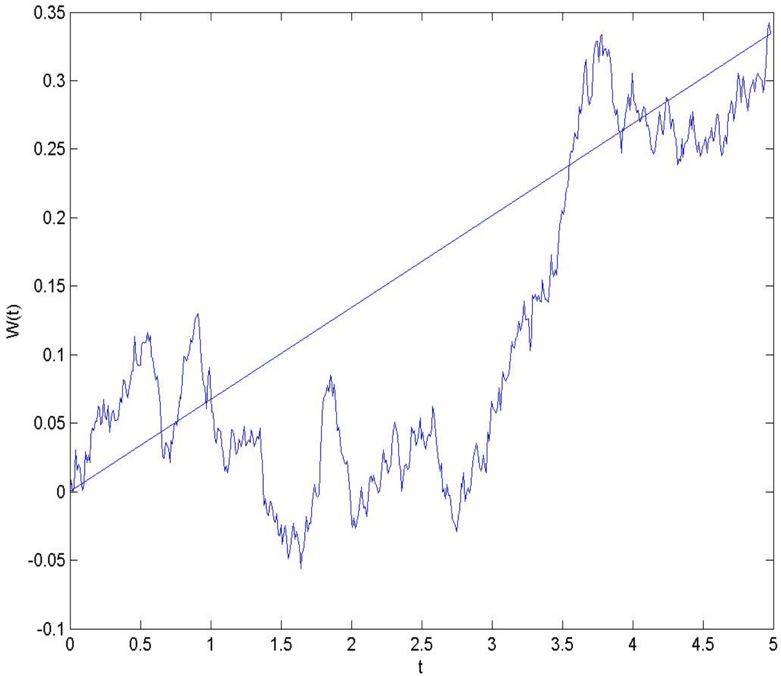
- مسیرهای فرآیند وینر به صورت تقریباً مطمئن پیوسته اند یعنی

$$\mathbf{P}(\{t \longrightarrow W_t \text{ پیوسته است}\}) = ۱.$$

- فرآیند وینری که از نقطه x آغاز می شود، یکتا نیست.
- در بسیاری از مسائل کاربردی فیلتر $\mathcal{F}_t$ را به صورت $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s, s \leq t\})$ در نظر می گیرند و آن را فیلتر طبیعی گویند.
- $$\mathbf{E}[|W_t - W_s|^۴] = ۳|t - s|^۲.$$

ادامه نکات

- فرآیند وینر ایستایی است یعنی توزیع توأم $W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}$ به t بستگی ندارد.
- W_{t_1} و W_{t_2} ازهم مستقل اند.
- مسیرهای براونی هیچ جا مشتق پذیرند.
- مسیرهای براونی روی بازه های کراندار با تغییرکراندار نیستند.
- مجذور تغییرات مسیرهای براونی روی هر بازه کراندار، متناهی است.



شکل ۳: یک مسیر از حرکت براونی

۲.۲ انتگرال تصادفی

اکنون به سؤال مطرح شده در مطالب آغازین و به صورت کامل تر می پردازیم

.چه تعبیری از انتگرال ذیل دارید؟

$$\int_{t_\circ}^{t} g(\omega, s)\, dB_s(\omega),$$

"ایتو" ریاضی دان ژاپنی با در نظرگرفتن ویژگی های فرآیند وینر، انتگرال فوق را با تعریفی که به نام خود او شهرت دارد، تعبیر کرد. وی در ابتدا انتگرال را برای توابع مقداماتی تعریف نمود و سپس آنرا به دسته های وسیع تر تعمیم داد.

تعریف

تابع $\phi : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ را مقدماتی گوییم هرگاه

$$\phi(s, \omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega) \chi_{[t_j, t_{j+1}]}(s),$$

که درآن $\{t_0 < \dots < t_N = t\}$ افرازی از بازه ی $[t_0, t]$ است. $e_j(\omega)$ ، $\mathcal{F}_{t_j}$ـاندازه پذیر است . χ تابع مشخصه و $\mathcal{F}_{t_j}$ فیلتر طبیعی با مولد فرآیند وینر است. تعریف می کنیم:

$$\int_{t_0}^{t} \phi(s, \omega)\, dB_s(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega)(B(t_{j+1}) - B(t_j))$$

تعریف

فضای Υ شامل توابع $g : [0,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ است به طوری که:

- $g(s,\omega) \longrightarrow (s,\omega)$، تابعی $\mathcal{F} \times \beta$ـاندازه پذیر است.
- $g(s,\omega)$، $\mathcal{F}_s$ـ اندازه پذیراست.
- $\mathbf{E}[\int_{t_0}^{t} g(s,\omega)^2\, ds] < \infty$.

آنگاه برای هر تابع $g \in \Upsilon$ دنباله ی

$$\phi_n(s,\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} g(t_j,\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}]}(s), \quad t_0 \leq s \leq t$$

تعریف می شود.

می توان نشان داد

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbf{E}\Big(\int_{t_\circ}^{t} |\phi_n(s,\omega)-g(s,\omega)|^{۲}\, ds\Big) = \circ.$$

آنگاه تعریف می کنیم

$$\int_{t_\circ}^{t} g(\omega,s)\, dB_s(\omega) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{t_\circ}^{t} \phi_n(s,\omega)\, dB_s(\omega),$$

در $L^{۲}$.

مثال

برای فرآیند وینر استاندارد داریم:

$$\int_{۰}^{t} B(s)\, dB_s = \frac{{B_t}^{۲}}{۲} - \frac{t}{۲},$$

(تمرین)

سؤال

تفاوت عمده ی انتگرال ریمان و ایتو چیست؟

چند نکته

- انتگرال تصادفی ایتو یک عملگر خطی است.
- $\mathbf{E}(\int_{t_0}^{t} g(s,\omega)\, dW(s)) = 0$.
- انتگرال $\int_{t_0}^{T} g(s,\omega)\, dW(s)$، $\mathcal{F}_T$ ـ اندازه پذیراست.
- گوییم فرآیند تصادفی $X(t)$ نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{\{t\geq t_0\}}$ مارتینگل است هرگاه $X(t)$ برای هر t فرآیندی $\mathcal{F}_t$ ـ اندازه پذیر باشد و $\mathbf{E}|X_t| < \infty$. همچنین برای $s \leq t$، $\mathbf{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s)$ تقریباً مطمئن.

ادامه نکات

- ایزومتری ایتو : برای هر تابع $g \in \Upsilon$ داریم:

$$\mathbf{E}[\int_{t_0}^{t} g(X(s))\, dW(s)]^2 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{E}|g(X(s)|^2\, ds.$$

- برای هر $g \in \Upsilon$، انتگرال تصادفی $\int_{t_0}^{t} g(s,,\omega)\, dW(s)$ نسبت به فیلتر طبیعی $\mathcal{F}_t$ مارتینگل است و همچنین

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t_0 \le t \le T} |\int_{t_0}^{T} g(s,\omega)\, ds| \ge \lambda\Big) \le \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{E}[\int_{t_0}^{T} g(s,\omega)^2\, ds]$$

سؤال

نشان دهید فرآیند وینر W_t نسبت به فیلتر طبیعی $\mathcal{F}_t$ مارتینگل است.

۳ معادله دیفرانسیل تصادفی

معادله دیفرانسیل تصادفی

تحت فضای احتمال کامل $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}, \mathbf{P})$ یک معادله دیفرانسیل تصادفی به صورت ذیل تعریف می شود:

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))\,dt + b(t, X(t))\,dW(t), \quad [t_0, T] \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{۲}$$

چندنکته

- a, b را که توابعی برل اندازه پذیرند، به ترتیب رانش و پخش گوییم. اگر ضریب پخش به $X(t)$ بستگی نداشته باشد، گوییم معادله دارای نویز جمعی است در غیراین صورت معادله از نوع ضربی است.
- اگر ضریب رانش و پخش به زمان بستگی نداشته باشد معادله را خود گردان گوییم.
- در بسیاری موارد، معادله به فرم انتگرالی در نظر گرفته می شود:

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, X(s))\, dW(s).$$

جواب قوی

تحت فضای احتمال کامل فیلتر شده ی $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}, \mathbf{P})$ فرآیند تصادفی $X(t)$ را جواب قوی معادله دیفرانسیل تصادفی (۲) گوییم هرگاه

- $X(t)$ با احتمال یک در معادله دیفرانسیل صدق کند.
- $X(t) \in \mathcal{F}_t$، یعنی $X(t)$، $\mathcal{F}_t$ـ اندازه پذیراست.
- مسیرهای نمونه ای X پیوسته اند. یعنی به ازای هر t، $X(t,.)$ تابعی پیوسته است.
- $\int_0^t |a(X(s))| + b(X(s))^2 \, ds < \infty \quad P-a.s$

یکتایی قوی

اگر Y جواب دیگری از معادله (۲) باشد و

$$\mathbf{P}\Big(\{X(t) = Y(t) \quad t \in [t_\circ, \infty)\}\Big) = ۱,$$

آنگاه جواب X به معنی مجزا یکتاست.

وجود و یکتایی

فرض کنید توابع رانش و پخش a, b در شرط لیپ شیتس سراسری صدق کنند و دارای رشد خطی باشند، همچنین اگر $\mathbf{E}|X_\circ|^p < \infty$ برای $p \geq ۱$، آنگاه معادله دیفرانسیل تصادفی دارای جواب قوی است که به معنای مجزا یکتاست.

۴ گسسته سازی

به صورت عملی برای ساختن هر طرح تقریبی، بایستی از مجموعه های نامتناهی به متناهی محدود شویم! اگرچه می توان بحث را به حالت پیوسته تعمیم داد. یکی از این روش ها گسسته سازی است. بدین منظور افراز گسسته سازی $\{t_0 < t_1 < ... < t_N = T\}$ از بازه $[t_0, T]$ را درنظر می گیریم.

دو طرح را به طور خاص معرفی می کنیم:

تتا اویلرماریامایا

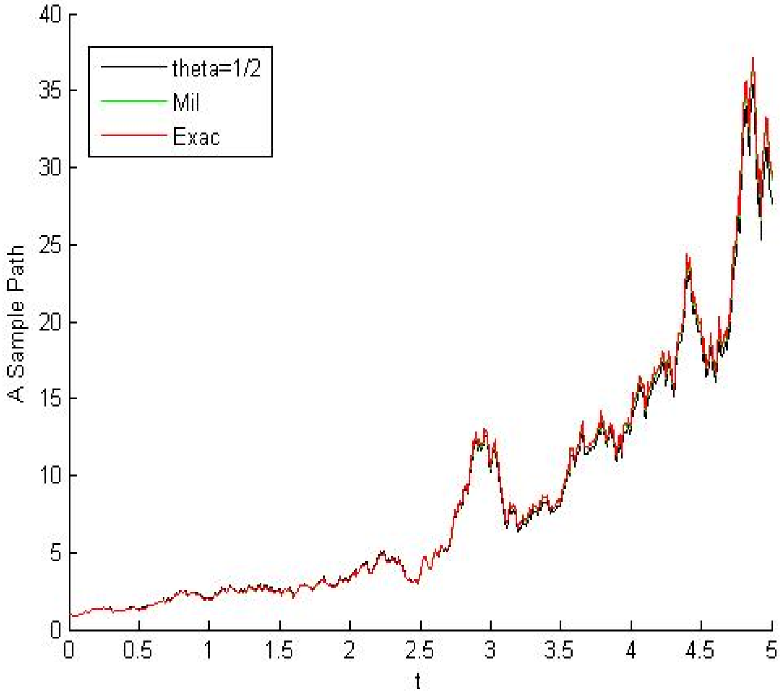
با $\widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + \left(\theta a(\widetilde{X}_n) + (1-\theta) a(\widetilde{X}_{n+1})\right) h_n + b(\widetilde{X}_n)\, \Delta W_n$.

$\widetilde{X}_1 = X_0$، $\Delta W_n = W_{n+1} - W_n, h_n = t_{n+1} - t_n$ در حالت خاص

$\theta = 1$ طرح معروف اویلرماریاما را خواهیم داشت.

میلشتاین

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_{n+1} &= \widetilde{X}_n + a(\widetilde{X}_n)\, h_n + b(\widetilde{X}_n)\, \Delta W_n \\ &+ \tfrac{1}{2} b(\widetilde{X}_n) * b'(\widetilde{X}_n)((\Delta W_n)^2 - h_n) \end{aligned} .$$



شکل ۴: یک مسیر از جواب های تقریبی و دقیق برای معادله (۱) که درآن جواب دقیق به صورت $S_t = S_\circ exp\Big((\mu - \frac{\sigma^۲}{۲})(t - t_\circ) + \sigma(B_t - B_\circ)\Big)$ است. همچنین $\mu = ۰/۵, \sigma = ۰/۵$.

سؤال

پیشینه ی روش های عددی مبتنی برچیست؟

فرمول ایتو

برای هر تابع $U \in C^{۱,۲}([t_۰, T] \times \mathbf{R})$ داریم:

$$dU(t,X(t)) = \left(\frac{\partial U}{\partial t}(t,X(t)) + a\frac{\partial U}{\partial x}(t,X(t)) + \right.$$

$$\left.\frac{۱}{۲}b^۲\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲}(t,X(t))\right) dt + \left(b\,\frac{\partial U}{\partial x}(t,X(t))\right) dW(t)$$

سؤال

انتگرال $\int_{t_۰}^{t} W(s)\, dW(s)$ را با استفاده از فرمول ایتو بدست آورید.

(راهنمایی: قراردهید $U_t = (X_t)^۲$) همچنین با استفاده از فرمول ایتو جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) را بدست آورید. (قراردهید $U_t = ln(X_t)$)

۱.۴ بسط ایتو-تیلر

بسط ایتو-تیلر

در حالت خاص اگر $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ دوبار به طور پیوسته مشتق پذیر باشد آنگاه فرمول ایتو به فرم ذیل است:

$$df_s = L^{0} f_s ds + L^{1} f_s dW(s),$$

که درآن

$$L^{0} = a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}, \quad L^{1} = b\frac{\partial}{\partial x}.$$

بنابراین می توان نوشت:

$$f(X_t) = \int_{t_0}^{t} L^0 f(X_s)\, ds + \int_{t_0}^{t} L^1 f(X_s)\, dW(s).$$

اکنون به معادله دیفرانسیل تصادفی (۲) بازمی گردیم. به منظورا ینکه بسط ایتو تیلر را اعمال کنیم، معادله دیفرانسیل را به فرم انتگرالی می نویسیم:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} a(X(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} b(X(s))\, dW(s). \qquad (۳)$$

فرمول ایتو را برای ضرایب رانش و پخش a و b با فرض اینکه دوبار به طور پیوسته مشتق پذیر باشند بکار می بریم:

ایتو-تیلر

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \Big[\underbrace{a(X(t_0))}_{1} + \int_{t_0}^{s} L^0(a(X(u)))\,du + \int_{t_0}^{s} L^1(a(X(u)))\,dW(u) \Big]\,ds + \int_{t_0}^{t} \Big[\underbrace{b(X(t_0))}_{2} + \int_{t_0}^{s} L^0(b(X(u)))\,du + \underbrace{L^1(b(X(u)))\,dW(u) \Big]\,dW(s)}_{3}.$$

با دقت روی بسط فوق براحتی می توان دریافت که جملات ۱ و ۲ طرح اویلرماریاما را تشکیل می دهند. همچنین جملات ۱و ۲ و ۳ طرح میشتاین را می سازند. اکنون می توان فرمول ایتو را برای $f = L^0 a$ یا $f = L^1 a$ ادامه داد و روش های دیگری استخراج کرد. اگر چه وجود انتگرال های تصادفی چندگانه که منجر به پیچیده شدن روش های اینچنینی می گردد، انگیزه را برای ایجاد روش هایی چون رانگه کوتای تصادفی فراهم می کند.

سؤال

آیا این تقریب ها ما را به سر منزل مقصود می رسانند؟
به عبارتی این جواب های تقریبی به چه میزان معرف جواب های دقیق هستند؟ ابزارهای لازم کدامند؟

۲.۴ همگرایی

با توجه به ماهیت تصادفی بودن مقادیر عددی در هر طرح تصادفی، همگرایی بر ۴ دسته ذیل می تواند بکار گرفته شود:

- همگرایی L^p : دنباله ی متغیرهای تصادفی $\{\widetilde{X}_n\}_{n\geq ۰}$ به X به معنی L^p ، $p \geq ۱$، همگراست هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|\widetilde{X}_n - X|^p = ۰.$$

- همگرایی در احتمال : دنباله ی متغیرهای تصادفی $\{\widetilde{X}_n\}_{n\geq ۰}$ به X به معنی در احتمال همگراست هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\widetilde{X}_n - X| > \varepsilon\} = ۰.$$

- همگرایی مسیری : دنباله ی متغیرهای تصادفی $\{\widetilde{X}_n\}_{n\geq ۰}$ به X به معنی مسیری همگراست هرگاه

$$\mathbf{P}\Big(\{\lim_{n\to\infty} \widetilde{X}_n = X\}\Big) = ۱.$$

- همگرایی ضعیف : دنباله ی متغیرهای تصادفی $\{\widetilde{X}_n\}_{n\geq ۰}$ به X به معنی ضعیف همگراست هرگاه به ازای هر تابع به اندازه کافی هموار f داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{E}(f(\widetilde{X}_n)) - \mathbf{E}(f(X))| = ۰.$$

نرخ همگرایی

گوییم طرح عددی $\widetilde{X}$ به X با نرخ همگرایی k به معنی میانگین مربع همگراست هرگاه ثابت های مثبت C و δ وجود داشته باشند به طوری که

$$\mathbf{E}\Big(\sup_{n=۱,\dots,N}|\widetilde{X}_n - X(t_n)|^۲\Big)^{\frac{۱}{۲}} < C\,h^k,$$

که درآن $h = max(t_{i+۱} - t_i)$ و $h \in (۰,\delta)$.

مثال

نرخ همگرایی میانگین مربع روش تتا اویلرماریاما مقدار $\frac{۱}{۲}$ و روش میلشتاین مقدار ۱ است.

۳.۴ متغیرهای تصادفی

واضح است که برای داشتن یک طرح تقریبی تصادفی، بایستی بتوان نموهای براونی را تولید کرد. همانطور که ذکر شد نموهای براونی توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس طول گام دارند. بنابراین تولید متغیرهای نرمال در بخش عددی تصادفی مهم است. اکنون دو روش برای تولید این توزیع مبتنی بر توزیع یکنواخت ارائه می کنیم. قابل ذکر است که برای تولید متغیرهای با توزیع یکنواخت، می توان از روش هایی چون

$$LCG\,(Liner\ Congruential\ Generators)$$

ها بهره برد.

روش باکس-مولر

- ابتدا دو متغیر تصادفی $U_۱, U_۲$ با توزیع یکنواخت $U(۰, ۱)$ تولید کنید.
- قرار دهید

$$V = ۲\pi U_۲, \quad R = -۲ log(U_۱)$$

- قرار دهید

$$Z_۱ = \sqrt{R} cos(V), Z_۲ = \sqrt{R} sin(V)$$

این دو متغیر به صورت توأم توزیع نرمال دومتغیره دارند.

روش مارساگلیا-بری

به منظور اجتناب از محاسبات توابع مثلثاتی، روش باکس-مولر به صورت ذیل اصلاح می شود:

- متغیرهای $U_۱, U_۲$ با توزیع یکنواخت $U(۰, ۱)$ را تولید کنید. قرار دهید $U_۱ \longleftarrow ۲ * U_۱ - ۱$، $U_۲ \longleftarrow ۲ * U_۲ - ۱$ و $X = {U_۱}^۲ + {U_۲}^۲$
- تازمانی که $X > ۱$، $U_۱, U_۲$ را با توزیع یکنواخت $U(۰, ۱)$ تولید کنید و قرار دهید $U_۱ \longleftarrow ۲ * U_۱ - ۱$، $U_۲ \longleftarrow ۲ * U_۲ - ۱$ و $X = {U_۱}^۲ + {U_۲}^۲$.
- قرار دهید: $Z_۱ = U_۱ Y, \quad Z_۲ = U_۲ Y$ با $Y = \sqrt{-۲ log(X)/X}$.

۵ روش های مرتبه بالا

برای بدست آوردن روش های با دقت بالا، طرح هایی مبتنی بر بسط ایتو-تیلر ارائه می گردد. در ادامه، مباحثی ارائه می شود که در حالت کلی در ابعاد بالا تعریف می شود. برای سادگی همچنان بحث را در حالت تک بعدی ادامه می دهیم.

تعریف

$\alpha = (j_1, ..., j_r)$ را که در آن $j_i \in \{0, 1\}$، یک چندندیس گوییم.

همچنین $-\alpha = (j_2, ..., j_r)$، $\alpha^- = (j_1, ..., j_{r-1})$، $l(\alpha) = r$ و $n(\alpha)$ برابر با تعداد صفرهای α است.

ادامه تعریف

همه چند اندیسی ها را در مجموعه ذیل قرار می دهیم:

$$\mathcal{M} = \{\alpha = (j_1, ..., j_r), j_i \in \{0, 1\}, i = 1, ..., r, \ r \geq 1\} \cup \{v\}$$

که در آن v یک چنداندیسی با طول صفر است. $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ را سلسله مراتبی گوییم هرگاه

- $\mathcal{A} \neq \varnothing$
- $\alpha \in \mathcal{A} \Longrightarrow {}^{-}\alpha \in \mathcal{A}$
- $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha) < \infty$

سؤال

کدام یک از مجموعه های ذیل، سلسله مراتبی است؟

$$\varnothing, \{(۰)\}, \{v, (۱)\}, \{v, (۰), (۰, ۱)\}, \{v, (۰), (۱), (۰, ۱)\}$$

سؤال

نشان دهید مجموعه

$$\Lambda_k = \{\alpha \in \mathcal{M}, \quad l(\alpha) + n(\alpha) \leq ۲k \quad or \quad l(\alpha) = n(\alpha) = k + \frac{۱}{۲}\}$$

برای مقادیر $k \in \{\frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, \ldots\}$ سلسله مراتبی است.

ادامه تعریف

برای هر تابع $f \in C^h(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ با $h = l(\alpha) + n(\alpha)$، تعریف می کنیم:

$$f_\alpha = \begin{cases} f : r = ۰ \\ \\ L^{j_۱} f_{-\alpha} : l \geq ۱ \end{cases}$$

و برای $t \in [t_۰, T]$

$$I_\alpha[f(.)]_{t_۰,t} = \begin{cases} f(t), \;\; r = ۰ \\ \\ \int_{t_۰}^{t} I_{\alpha^-}[f(.)]_{t_۰,s}\, ds : r \geq ۱, j_r = ۰ \\ \\ \int_{t_۰}^{t} I_{\alpha^-}[f(.)]_{t_۰,s}\, dW(s) : r \geq ۱, j_r = ۱ \end{cases}$$

ادامه تعریف

مجموعه فرآیندهای تصادفی اندازه پذیر از راست پیوسته و دارای حدچپ را در نظربگیرید. از مجموعه چنین فرآیندهایی، ۴ دسته ذیل را در نظر می گیریم:

- $\mathcal{H}_v$ شامل توابعی با $|f(s,\omega)| < \infty$ به ازای هر $t_0 < s < T$ و با احتمال یک.
- $\mathcal{H}_{(0)}$ شامل توابعی با $\int_{t_0}^{t} |f(s,\omega)|\, ds < \infty$ و با احتمال یک.
- $\mathcal{H}_{(1)}$ شامل توابعی با $\int_{t_0}^{t} |f(s,\omega)|^2\, ds < \infty$ با احتمال یک.
- برای $\alpha = (j_1, ..., j_l)$، $f \in \mathcal{H}_{(\alpha)}$ اگر $I_{\alpha-}[f(.)]_{t_0,.} \in \mathcal{H}_{(j_l)}$ با $l \geq 2$.

طرح قوی با مرتبه همگرایی k

می توان نشان داد بسط ایتو-تیلر متناظر با مجموعه Λ_k به صورت ذیل است:

$$f(X(t)) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} I_\alpha[f_\alpha(X(t_0))]_{t_0,t} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\Lambda_k)} I_\alpha[f_\alpha(X(t_0))]_{t_0,t}$$

با $t \in [t_0, T]$ و

$$\mathcal{B}(\Lambda_k) = \{\alpha \in \mathcal{M} \backslash \Lambda_k \quad sth \ {}^-\alpha \in \Lambda_k\}.$$

گزاره

فرض کنید برای هر $\alpha \in \Lambda_k$، $f(X(t_0)) \in \mathcal{H}_\alpha$. همچنین برای هر $\alpha \in \mathcal{B}(\Lambda_k)$، $f(X(.)) \in \mathcal{H}_\alpha$ و

$$\sup_{t_0 \le t \le T} \mathbf{E}\left(|f_\alpha(t, X(t))|^2\right) < C(\alpha).$$

آنگاه برای هر $t \in [t_0, T]$ طرح

$$\widetilde{X}_k(t) = \sum_{\alpha \in \Lambda_k} I_\alpha[f_\alpha(X(t_0))]_{t_0, t},$$

که آنرا بسط ایتو-تیلر بریده نیز گویند به معنی میانگین مربع و با نرخ همگرایی k به جواب دقیق همگراست.

سؤال

برای $k = ۱, ۲, ۳$ و $f = x$ ، $\widetilde{X}_k$ را بیابید.

۶ مونت کارلو

مونت کارلو

پس از آشنایی با تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی به سؤال آغازین در ارتباط با تقریب قیمت اختیار باز می گردیم. روشی که در اینجا پیشنهاد می شود، مونت کارلوست که مبتنی بر شبیه سازی مسیرهای فرآیندهای تصادفی است. در این روش M مسیر نمونه ای از دینامیک دارایی تقریب می شود که باروش های معرفی شده میسر است و سپس با اعمال تابع پرداخت نهایی، میانگین روی همه ی مقادیر بدست آمده مطلوب را فراهم می کند:

الگوریتم مونت کارلو

- μ را با نرخ بهره بدون ریسک r جایگزین کنید.
- برای M ,...,$i = ۱$ با استفاده ازروش عددی دردسترس، $\widetilde{S_T}^i$ را تقریب بزنید. ممکن است از یک طرح گسسته سازی N نقطه ای استفاده کنید.
- برای M ,...,$i = ۱$، مقدار $C_i = f(\widetilde{S_T}^i)$ رامحاسبه کنید.
- قرار دهید:

$$\widetilde{V} \simeq \frac{۱}{M} \sum_{i=۱}^{M} C_i.$$

برنامه های آتی

- پایداری عددی
- حسابان استراتونویچ
- روش های ضمنی (مسائل سخت)
- معادلات تصادفی با شرایط ضعیف
- مباحث بیشتر در تولید متغیرهای تصادفی
- نقش محاسبات تصادفی در مدیریت ریسک
- روش های تحت همگرایی ضعیف

مراجع

[1] Peter. E. Kloeden and Eckhard. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, *Springer-Verlag, Berlin, 1992.*

[2] Paul Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, *Vol. 53. Springer Science and Business Media, 2003.*

[3] Bernt Oksendal, Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications, *Springer Science and Business Media, 2013.*

[4] Xuerong Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, *Horwood, second ed.* Elsevier 2007.

طی ۵ سال آینده شما هیچ تغییری نخواهید کرد مگر به دلیل ملاقات با افرادی خاص و کتاب هایی که مطالعه می کنید. (چارلز جونز)

با تشکر از توجه شما